De motu planete

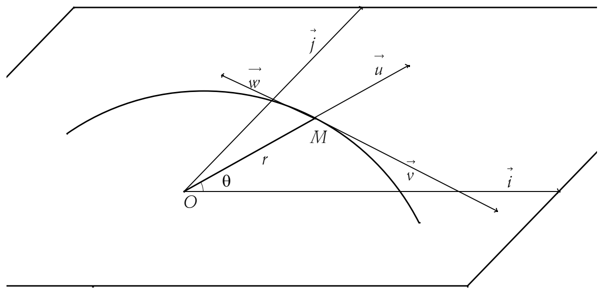
1. La loi de la gravitation chez Newton

Quand il n'y a que deux corps, l'un fixe et l'autre mobile on montre que l'on peut se placer dans un plan contenant ces deux corps ainsi que le vecteur vitesse du corps mobile (voir produit vectoriel) : prenons alors le corps fixe comme origine O du repère et appelons M le point mobile.

Les coordonnées polaires de M sont r et θ, on a donc le vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = r\vec{u}$.

Notons le vecteur vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(r\vec{u})}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u} + r\dfrac{d\vec{u}}{dt}$.

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, θ simple variable, alors $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \vec{w}$ et $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$. D'autre part r et θ sont des fonctions du temps et par exemple la dérivée de $\vec{u}$ est $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{w}$.



Trajectoire d'une particule

L'accélération est alors : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\vec{u} + \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + r\dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2}$ d'où

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\vec{w} + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{w} + \frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{w}}{dt}\right)$$

avec $\dfrac{d\vec{w}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}$.

Nous obtenons finalement $\vec{a} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\vec{u} + 2\dfrac{dr}{dt}.\dfrac{d\theta}{dt}\vec{w} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{w} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}$, soit

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u} + \left[2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{w}.$$

Cette formule (formule de Binet, début du 19e siècle) étant valable pour n'importe quel point mobile, dans la relation fondamentale de la mécanique $\vec{F} = m\vec{a}$, nous obtenons que la composante de $\vec{F}$ suivant la direction du pôle O est

$$F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

et celle suivant la direction orthogonale à

$$F_\theta = m\left[2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right].$$

Revenons à la force d'attraction entre les deux particules : d'après Newton la force d'attraction est $\vec{F}=-\frac{k}{r^2}\vec{u}$, avec $k=\gamma m_1 m_2$, d'autre part en mécanique la force liée à un mouvement est proportionnelle à l'accélération et à la masse du mobile : $\vec{F}=m_2\vec{a}$ par conséquent nous pouvons écrire

$$\frac{-k}{r^2}\vec{u}=m_2\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}+m_2\left[2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{w}$$

d'où le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases}\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{-k}{m_2r^2}\\ 2\dfrac{dr}{dt}.\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=0.\end{cases}$$

Posons $C=-\frac{k}{m_2}=-\gamma m_1$ à partir de $k=\gamma m_1 m_2$, et multiplions la deuxième équation par r :

$$\begin{cases}\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{C}{r^2}\quad(1)\\ 2r\dfrac{dr}{dt}.\dfrac{d\theta}{dt}+r^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=0\quad(2)\end{cases}$$

Remarquons alors que si on dérive par rapport à t l'expression $r^2\frac{d\theta}{dt}$, nous obtenons $2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Conclusion : de l'équation (2) nous tirons $r^2\frac{d\theta}{dt}=\text{constante}=B$, soit $\frac{d\theta}{dt}=\frac{B}{r^2}$.

En posant $r=\frac{1}{z}$ alors $\frac{d\theta}{dt}=Bz^2$ et $\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt}$ (dérivée des fonctions composées) ainsi que $\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}=Bz^2\frac{dz}{d\theta}$, d'où $\frac{dr}{dt}=-B\frac{dz}{d\theta}$.

Cherchons maintenant $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-B\frac{dz}{d\theta}\right)=-B\frac{d^2z}{dtd\theta}=-B\frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\theta}{dt}=-B^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}$.

Ouf ! On peut enfin travailler sur l'équation (1) : $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{C}{r^2}$, en remplaçant on obtient $-B^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}-\frac{1}{z}B^2z^4=Cz^2$ puis en simplifiant par $-B^2z^2$:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}+z=-\frac{C}{B^2}$$

c'est-à-dire une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre. Or nous savons que dans le cas où le second membre est une constante, on peut choisir la solution particulière égale à une constante H par exemple : ici ça donne $0+H=-\frac{C}{B^2}$.

Résolvons l'équation sans second membre ; équation caractéristique : $x^2 + 1 = 0$, d'où $x = \pm i$, soit la solution

$$z_0 = A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta = A\cos(\theta + \varphi),$$

A et φ deux constantes. La solution complète est alors

$$z = A\cos(\theta + \varphi) + H = A\cos(\theta + \varphi) - \frac{C}{B^2}.$$

La solution pour r est donc : $r = \dfrac{1}{A\cos(\theta+\varphi) - \dfrac{C}{B^2}}$ ou encore après quelques très légères manipulations et en posant $K = -\dfrac{B^2}{C}$ et $e = -\dfrac{B^2 A}{C}$:

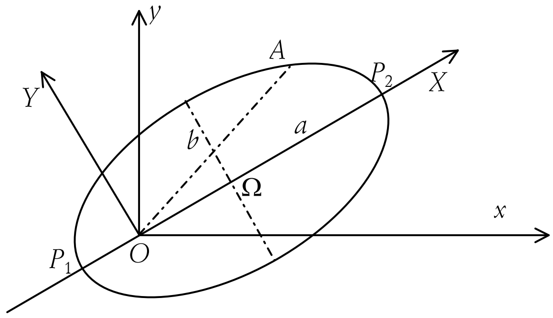
$$r = \frac{K}{1 + e\cos(\theta')}$$

qui représente l'équation générale d'une conique en polaire.

2. Retrouver les lois de Kepler à partir de Newton

L'équation de la trajectoire d'un corps de masse m_2 dans la mécanique newtonienne est donnée par $r = \dfrac{K}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ avec $K = -\dfrac{B^2}{C} = \dfrac{B^2}{\gamma m_1}$ où le pôle est l'autre objet soumis à l'attraction.

K est le paramètre de l'ellipse, e son excentricité, θ représente l'angle $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right)$ et θ_0 l'angle $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}\right)$; a est le demi grand-axe de l'ellipse et b le demi petit-axe. Ω est le centre.



On a $OP_1 = \dfrac{K}{1+e}$, $OP_2 = \dfrac{K}{1-e}$, $P_1P_2 = 2a = \dfrac{2K}{1-e^2}$.

O est un foyer de l'ellipse et la distance focale $O\Omega = c = a - OP_1 = \dfrac{Ke}{1-e^2}$ et $\dfrac{c}{a} = e$.

Dans le repère $\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}\right)$ l'équation de l'ellipse est $X^2 + Y^2 = (K - eX)^2$, soit $X^2 + \dfrac{2Ke}{1-e^2}X + \dfrac{Y^2}{1-e^2} = \dfrac{K^2}{1-e^2}$

d'où $\dfrac{(X+ae)^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2)$.

L'énergie mécanique de A est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle ; le potentiel newtonien est de la forme $\dfrac{\gamma m_1 m_2}{r}$, mais ici la force étant attractive on a une énergie potentielle négative ; quand la particule A entre dans la zone d'attraction avec une vitesse v_0 et à une distance r_0 de O, l'énergie mécanique est alors $E_m = \dfrac{1}{2}m_2 v_0^2 - \dfrac{\gamma m_1 m_2}{r_0}$.

Si on reprend les formules de Binet où on avait posé $z = \dfrac{1}{r}$, on a $z = \dfrac{1}{K}(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$ d'où

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{e\sin(\theta - \theta_0)}{K} \quad ;$$

or nous avions obtenu dans la résolution du problème que la vitesse avait pour composantes en polaire $\left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right) = \left(-B\frac{dz}{d\theta}, Bz\right)$; l'énergie de A est alors

$$E_m = \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}m_2B^2\left(\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2\right) - \gamma m_1 m_2 z$$

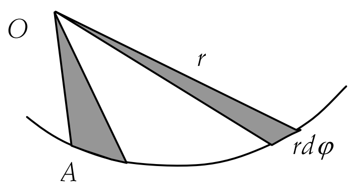
et il reste à remplacer chaque terme par son expression.
Après simplification on obtient alors

$$E_m = \frac{1}{2}m_2B^2\left(\frac{1}{K^2} + \frac{e^2}{K^2} + \frac{2e\cos(\theta-\theta_0)}{K^2}\right) - \gamma m_1 m_2 \frac{1+e\cos(\theta-\theta_0)}{K}$$

or $K = -\frac{B^2}{C} = \frac{B^2}{\gamma m_1}$, ce qui donne finalement $E_m = \frac{\gamma^2 m_1^2 m_2}{2B^2}(e^2-1)$, d'où également $E_m = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2a}$ qui ne dépend donc que du grand axe de l'ellipse.

La vitesse aréolaire du point A est la vitesse à laquelle il parcourt une aire S de l'ellipse :

$$v_A = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r.rd\theta}{2}\right) \approx \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$



dont nous avons vu que c'était une constante B.
Nous avons donc la 1ère loi de Kepler : les rayons vecteurs balaient des aires égales en des temps égaux.

Le temps mis pour faire une ellipse complète est alors $T = \frac{S_{ellipse}}{v_A} = 2\frac{\pi ab}{B}$, or $b = a\sqrt{1-e^2}$ et $a = \frac{K}{1-e^2} = \frac{B^2}{\gamma m(1-e^2)}$ d'où $T = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{B} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma m}}a^{\frac{3}{2}}$; on retrouve bien la dernière loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m}$.

Par exemple on sait que la période de révolution de Jupiter est de 12 ans environ, on connaît la distance Terre-Soleil, soit $a = 140.10^6$ km, on a alors $\frac{T_J^2}{a_J^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$ d'où $a_J = 12^{\frac{2}{3}}.140.10^6 \approx 720.10^6\,\text{km}$.